

2023 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

基礎科目試験問題

(実施時間 9:30 ~ 12:30)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて12頁ある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「数学1」、「数学2」、「数学3」、「数学4」、「数学5」、「電磁理論1」、「電磁理論2」、「電気電子回路1」、及び、「電気電子回路2」の9題*あり、この順番に綴じられている。このうち、5題を選択し解答すること。但し、選択すべき試験問題は、受験コース毎に下表のように規定されている。
- 3.

受験コース名	選択すべき試験問題
電気工学コース	「数学1」、「数学2」、「数学3」、「数学4」、「数学5」の5題から3題、及び、「電磁理論1」、「電磁理論2」、「電気電子回路1」、「電気電子回路2」の4題から2題、合計5題を選択すること
量子情報エレクトロニクスコース	
情報通信工学コース	9題（上記*印）から5題選択すること

4. 解答開始前に、別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
5. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【数学1】解答は、白色（1番）の解答用紙に記入すること。

a を実数（real number）とし、行列（matrix） $A(a)$ を

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。以下の設問 (a)~(e) に答えよ。

- (a) 行列 $A(0)$ の固有値（eigenvalue）と固有ベクトル（eigenvector）をすべて示せ。
- (b) 行列 $A(2)$ の固有値と固有ベクトルをすべて示せ。
- (c) $(A(2) - 2I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ かつ $(A(2) - 2I)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を満たす、ベクトル（vector） \mathbf{x} を1つ求めよ。ここで、 I は 3×3 の単位行列（identity matrix）、 $\mathbf{0}$ は零ベクトル（zero vector）を表す。必要であれば設問 (b) の結果を用いてよい。
- (d) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ を計算せよ。ただし n は自然数（natural number）である。
- (e) $a \neq 0$ かつ $a \neq 2$ の時を考える。行列 $A(a)$ は、変換行列（transformation matrix）

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{a-2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて、ジョルダン標準形（Jordan normal form） $S^{-1}A(a)S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に変換できる。ここで、 S の2列目（second column）を抜き出したベクトルである $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に対して、 $(A(a))^n \mathbf{v}$ を求めよ。ただし n は自然数である。また、必要であれば設問 (d) の結果を用いてよい。

【数学2】解答は、赤色（2番）の解答用紙に記入すること.

x の関数 (function) y に関する微分方程式 (differential equation)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (1)$$

について以下の設問 (a)~(c) に答えよ. ただし, y' , y'' はそれぞれ x に関する y の第 1 次 (first-order), 第 2 次 (second-order) の導関数 (derivative) を表す.

(a) $y = u\phi(x)$ とおくことにより, 式 (1) が

$$u'' + F(x)u = G(x)$$

に変換されるとする. ただし, u は x の関数であり, u'' は x に関する u の第 2 次の導関数を表す. このとき, $\phi(x)$ を $P(x)$ を用いて示せ.

(b) $F(x)$ を, $P(x)$, $P'(x)$, $Q(x)$ を用いて示せ. ただし, $P'(x)$ は x に関する $P(x)$ の第 1 次の導関数を表す.

(c) $|x| < \frac{\pi}{2}$ において, 微分方程式

$$y'' + 2y' \tan x + 2y \tan^2 x = 4 \cos^2 x$$

の一般解 (general solution) を求めよ.

【数学3】 解答は、青色(3番)の解答用紙に記入すること.

複素平面 (complex plane) 上の変数 (variable) z に関する以下の設問(a),(b)に答えよ. ただし, z は複素数 (complex number) ($z = x + iy$)であり, x および y は実数 (real number), i は虚数単位 (imaginary unit) である.

(a) 次式を z について解け.

$$\sin z = i \sinh z \quad (1)$$

(b) 複素平面上で定義される正則関数 (regular analytic function) $f(z)$ について, 以下の設問(b-1),(b-2)に答えよ. ただし, $f(z)$ の実部 (real part) を u , 虚部 (imaginary part) を v とする.

(b-1) 次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

(b-2) 式(2)を用いて次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4 \left| \frac{df(z)}{dz} \right|^2 \quad (3)$$

【数学4】 解答は、黄色（4番）の解答用紙に記入すること。

実数関数 (real function) $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ において絶対積分可能 (absolutely integrable) かつ有界 (bounded) で、区分的に滑らか (piecewise smooth) である場合、 $f(x)$ はフーリエ変換 (Fourier transform) が可能である。 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ とその逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform) は、それぞれ

$$\mathcal{F}[f](u) = F(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \quad (1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(iux) du \quad (2)$$

と定義される。ただし i は虚数単位 (imaginary unit) である。以下の設問 (a)~(e) に答えよ。

(a) $\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](u) = iu F(u)$ を導出せよ。

(b) $f(x) = \exp(-ax^2)$ (a は正定数 (positive constant)) の場合、 $\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right]$ と $\frac{dF}{du}$ の関係式を導出せよ。

(c) 設問(b)の $f(x)$ について、 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}$ を用いて $F(u)$ を計算せよ。

(d) $g(x, y)$ が x についてフーリエ変換が可能であり、さらに、その結果が y についてフーリエ変換可能であるとき

$$\begin{aligned} G(u, v) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp(-iux) dx \right\} \exp(-ivy) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp\{-i(ux + vy)\} dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

と表記する。 $g_y(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy$ と $G(u, 0)$ の関係を求めよ。

(e) $g(x, y) = \exp(-ax^2) \exp(-by^2)$ (a, b は正定数) の場合について $G(u, v)$ を計算し、設問(d)で求めた関係が成り立っていることを示せ。

【数学5】解答は、水色（5番）の解答用紙に記入すること。

座席数が N の飛行機に、予め座席が指定されている N 人の客が一人ずつ搭乗していく状況を想定する。ただし N は3以上の自然数 (natural number) である。以下の設問 (a), (b) に答えよ。

- (a) 最初の搭乗客が、誤って、予め指定された座席とは異なる $N - 1$ 個の座席の中から無作為に (randomly) 一つ選んで着席したと仮定する。さらに、後続の各搭乗客は、もし、予め指定された座席が空いていればそこに着席するが、既に他の客が着席している場合には、その時点で空いている座席の中から無作為に一つ選んで着席すると仮定する。 m 番目 ($m = 2, 3, \dots, N$) の搭乗客が予め指定された座席に着席する確率 (probability) p_m を最初の客が着席した座席で場合分けを行うことによって求めよ。
- (b) 最初の搭乗客が N 個の座席から無作為に一つの席を選んで着席したと仮定する。さらに、後続の各搭乗客は設問 (a) と同じ規則に従って着席すると仮定する。このとき、最初の客を除く $N - 1$ 人の搭乗客の内、予め指定された座席に着席することができなかった搭乗客数 F_N の期待値 (expectation) $E[F_N]$ を求めよ。

【電磁理論1】 解答は、桃色(6番)の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～⑫の番号を記し、対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や数値、語句を解答用紙に記入せよ。ただし、③④⑬⑭については適切な語句を選び、その記号を記せ。

[1] 真空中または物質中に電荷が分布しているとき、これによって生じる電束密度は ① の法則を満たす。この法則の微分表示は、電束密度 \mathbf{D} 、電荷密度 ρ およびハミルトンの演算子 ∇ を用いて ② (1)

と表される。

まず真空中に分布する電荷によって生じる電界を考える。図1のように、半径 a の無限に長い円柱状の領域に電荷密度 ρ の一様な静止電荷が分布している。この円柱状電荷分布の中心軸を z 軸とする円柱座標系 (r, φ, z) をとり、その基本ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z$ とする。また真空の誘電率を ϵ_0 とする。

電界 \mathbf{E} の各方向成分を E_r, E_φ, E_z とすると、系の対称性より ③ (ア) E_r (イ) E_φ (ウ) E_z のみが値をもち、④ (ア) r (イ) φ (ウ) z にのみ依存する。これから式(1)を電荷分布の内外で場合分けすると、電界 ③ を用いて次のように書ける。

$$\frac{d}{d\text{④}} (\text{⑤}) = \begin{cases} \text{⑥} & (r < a) \\ \text{⑦} & (r > a) \end{cases} \quad (2)$$

両辺を ④ について積分し、 $r < a$ および $r > a$ の領域において積分定数をそれぞれ C_0, C_1 として左辺が電界 ③ となるよう変形すると

$$\text{③} = \begin{cases} \text{⑧} & (r < a) \\ \text{⑨} & (r > a) \end{cases} \quad (3)$$

となる。ここで z 軸上において ③ は ⑩ であることから、

$$C_0 = \text{⑪} \quad (4)$$

と求まる。さらに ① の法則から導かれる境界条件を用いると、

$$C_1 = \text{⑫} \quad (5)$$

と決まる。これから電界 \mathbf{E} は、基本ベクトルを用いて

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \text{⑬} & (r \leq a) \\ \text{⑭} & (r > a) \end{cases} \quad (6)$$

と求められた。

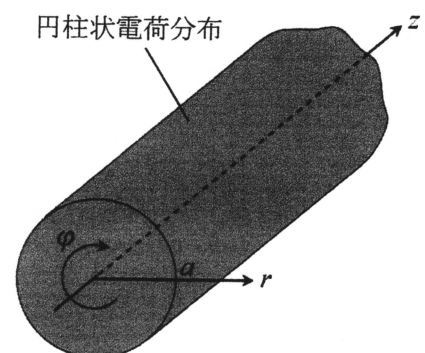


図 1

[2] 電磁界中に任意の閉曲面 S をとり、面 S によって囲まれる領域を V とする。式(1)の両辺を V にわたって積分し、左辺に ⑮ 定理を適用することで、① の法則の積分表示が得られる。これは、閉曲面 S に垂直で外方を向く単位ベクトル \mathbf{n} を用いて

$$\text{⑮} \quad (7)$$

と表される。

図1に示した真空中の電荷分布の周囲に、無限に長い等方で均質な円筒状誘電体を置いた場合の電界分布を考える(図2)。円筒状誘電体は内側半径が $b (> a)$ 、外側半径が $c (> b)$ で、その中心軸は z 軸に一致している。誘電体の誘電率を $\epsilon (> \epsilon_0)$ とし、外部から電荷は与えられていないものとする。

電界中の誘電体内では正および負の ⑰ (ア) 自由 (イ) 束縛 電荷が互いに逆方向にわずかに変位する分極が生じ、その結果、誘電体を置く前に比べ $b < r < c$ の領域の電界は ⑱ (ア) 強め (イ) 弱め られる。誘電体中の電束密度 \mathbf{D} と電界 \mathbf{E} および分極 \mathbf{P} の関係は

$$\text{⑱} \quad (8)$$

であることから、 ϵ を用いて

$$\mathbf{P} = (\text{⑳}) \mathbf{E} \quad (9)$$

が得られる。

誘電体中の電界 \mathbf{E} は、系の対称性を考慮して式(7)を用いると

$$\mathbf{E} = \text{㉑} \quad (b < r < c) \quad (10)$$

と求まる。一方、分極によって生じる分極電荷密度 ρ_p は、分極 \mathbf{P} を用いて

$$\rho_p = \text{㉒} \quad (11)$$

と表されることから、式(9)(10)を用いて微分を計算すると

$$\rho_p = \text{㉓} \quad (b < r < c) \quad (12)$$

と求まる。また、誘電体の内側および外側表面上に現れる面分極電荷密度 ξ_p は、それぞれ

$$\xi_p = \begin{cases} \text{㉔} & (r = b) \\ \text{㉕} & (r = c) \end{cases} \quad (13)$$

である。このとき分極によって誘電体に生じる z 軸方向単位長さあたりの電荷の総和は ㉖ となる。

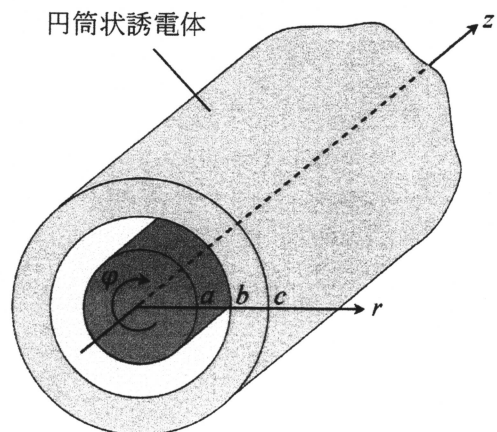


図 2

【電磁理論2】 解答は、緑色(7番)の解答用紙に記入すること。

解答用紙に①～⑫の番号を記し、対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や数値、語句を解答用紙に記入せよ。ただし、⑮に関しては語句を選んで、その記号を記述し、⑳と㉑はグラフを描け。

真空中の電界 E 、磁界 H に対するマクスウェルの方程式は、電流密度を J 、電荷密度を ρ 、誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とすると、次の4つのように記述される。

電束に関するガウスの法則： (1)

磁束に関するガウスの法則： (2)

ファラデー・マクスウェルの法則： (3)

アンペア・マクスウェルの法則： (4)

真空中の領域1と領域2が境界面を介して接している。それぞれの領域における境界の両側での電界と磁界をそれぞれ E_1, E_2, H_1, H_2 と表し、領域2から1へ向く境界面の単位法線ベクトルを n 、境界面の面電流密度と面電荷密度をそれぞれ K, ξ と表すと、電束に関するガウスの法則とアンペア・マクスウェルの法則に対応する境界条件はそれぞれ、

(5)

(6)

となる。

以下では、直角座標系 (x, y, z) において、基本ベクトルを i_x, i_y, i_z 、磁界 H のそれぞれの成分を H_x, H_y, H_z とする。アンペア・マクスウェルの法則を表す式(4)の空間微分の項を直角座標系で表すと、

式(4)の空間微分の項 = $i_x(\text{⑦}) + i_y(\text{⑧}) + i_z(\text{⑨})$ (7)

となる。

図1のように、 yz 平面に平行な厚さ d の無限に広い平板状領域において、定常電流が z 軸の正方向に流れている。電流密度は $J = i_z J$ で、 $J (J > 0)$ は定数とする。この場合、式(4)は 方向成分のみとなり、磁界 H は 成分のみとなるから、磁界を求めるために解くべき微分方程式は

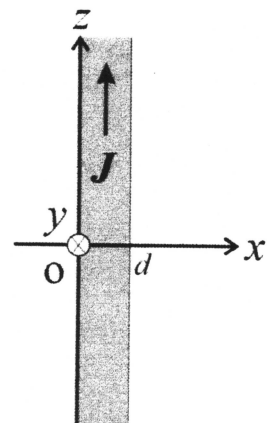


図1

= $\begin{cases} \text{⑬} & (x < 0) \\ \text{⑭} & (0 < x < d) \\ \text{⑮} & (x > d) \end{cases}$ (8)

となる。前述の境界条件に面電流密度 $\mathbf{K}=0$ を適用すると、磁界 \mathbf{H} の $\textcircled{15}$ (イ)法線, (ロ)接線成分, すなわち $\textcircled{11}$ 成分は連続となるから、これらを用いて式(8)を解くと、

$$\textcircled{16} = \begin{cases} \textcircled{17} & (x < 0) \\ \textcircled{18} & (0 \leq x < d) \\ \textcircled{19} & (x \geq d) \end{cases} \quad (9)$$

となる。この解から磁界 $\textcircled{16}$ の分布を x 軸が横軸のグラフに図示すると $\textcircled{20}$ のようになる。

更に、図2に示すように、図1と同様な電流が距離 d を隔て、平行かつ逆向きに流れる場合、式(9)を利用して磁界を求めると次のようになる。

$$\textcircled{16} = \begin{cases} \textcircled{21} & (x < 0, x \geq 3d) \\ \textcircled{22} & (0 \leq x < d) \\ \textcircled{23} & (d \leq x < 2d) \\ \textcircled{24} & (2d \leq x < 3d) \end{cases} \quad (10)$$

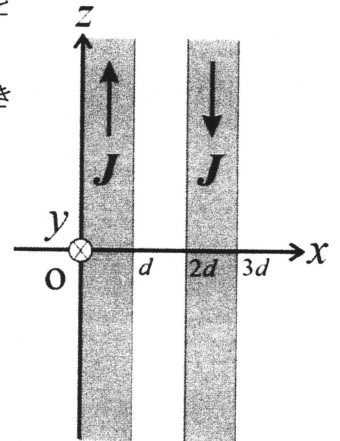


図2

この解から磁界 $\textcircled{16}$ の分布を x 軸が横軸のグラフに図示すると $\textcircled{25}$ のようになる。この場合、 $0 \leq x \leq 3d, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ の空間に蓄えられる磁界のエネルギー W_m を μ_0, J, d で表すと

$$W_m = \textcircled{26} \quad (11)$$

となる。

専門用語の英訳

電束密度	electric flux density
電荷密度	charge density
ハミルトンの演算子	Hamiltonian operator
電界	electric field
無限に長い	infinitely long
電荷分布	charge distribution
円柱座標系	circular-cylindrical coordinates
基本ベクトル	base vector
誘電率	dielectric constant, permittivity
各方向成分	each directional component
系の対称性	symmetry of the system
積分定数	constant of integration
境界条件	boundary condition
閉曲面	closed surface
円筒	hollow circular cylinder
誘電体	dielectric material
自由電荷	free charge
束縛電荷	bound charge
分極	polarization
磁界	magnetic field
電流密度	electric current density
透磁率	magnetic permeability
法線ベクトル	normal vector
面電流密度	surface current density
面電荷密度	surface charge density
直角座標系	cartesian coordinates
定常電流	stationary current
空間微分	spatial derivative

【電気電子回路1】 解答は、灰色(8番)の解答用紙に記入すること。

図1の回路において、スイッチSWは開いており、回路は正弦波定常状態^{*1}にあるとする。以下の問いに答えよ。ここで、 $e(t)$ は角周波数^{*2} ω の交流電圧源であり、抵抗 R_1 、 R_2 、キャパシタ C 、インダクタ L はすべて正の実数とする。また、虚数単位^{*3}は j とし、解答に複素数が含まれる場合は分母を実数化せよ。

- (1) 負荷回路(ポート1-1'より右側)の複素インピーダンス Z を求めよ。
- (2) 抵抗 R_2 を流れる電流 $i_R(t)$ のフェーザ^{*4}を \dot{I}_R としたとき、 \dot{I}_R の大きさ $|\dot{I}_R|$ と偏角 θ を求めよ。ただし、 $e(t)$ のフェーザを $\dot{E} = E\angle 0$ とする。
- (3) 電流 $i_R(t)$ の振幅が R_2 の値に依らないための角周波数 ω の条件を C 、 L を用いて示せ。
- (4) $e(t)$ の実効値が10V、角周波数 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 、抵抗 $R_2 = 10 \Omega$ 、キャパシタ $C = 0.2 \text{ F}$ 、インダクタ $L = 8 \text{ H}$ のとき、負荷回路(ポート1-1'より右側)における有効電力^{*5}、無効電力^{*6}、および力率^{*7}を求めよ。ただし、無効電力は電流の位相が電圧に対して遅れる場合を正にとること。

つぎに、SWを閉じ、十分に時間が経過し回路が正弦波定常状態にあるとする。以下の問いに答えよ。

- (5) $\omega \rightarrow 0$ および $\omega \rightarrow \infty$ の極限における負荷回路(ポート1-1'より右側)の複素インピーダンス Z をそれぞれ求めよ。
- (6) 正弦波定常状態における $i(t)$ の振幅が角周波数 ω に依らないための全ての条件を R_1 、 R_2 、 C 、 L のうち必要なものを用いて示せ。

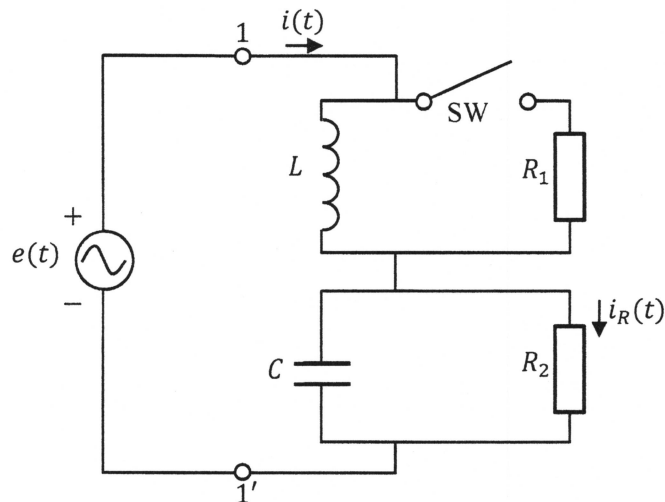


図1

*1 正弦波定常状態：sinusoidal steady state

*2 角周波数：angular frequency

*3 虚数単位：imaginary unit

*4 フェーザ：phasor

*5 有効電力：average power, real power

*6 無効電力：reactive power

*7 力率：power factor

【電気電子回路2】 解答は、だいたい色(9番)の解答用紙に記入すること。

図1, 2に示す演算増幅器^{*1}を用いた回路について、以下の各問いに答えよ。ただし、演算増幅器単体の電圧利得^{*2}を A 、入力インピーダンスを無限大、出力インピーダンスを零とし、虚数単位は j とする。

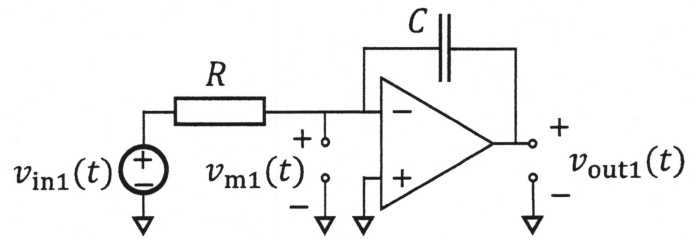


図1

図1の回路において、 $v_{in1}(t) = \sin \omega t$ [V]とし、角周波数^{*3} ω の正弦波定常状態^{*4}にある場合を考える。

(1-1) A が有限の時、出力電圧のフェーザ^{*5} \dot{V}_{out1} を、入力電圧のフェーザ \dot{V}_{in1} を用いて表せ。またこの回路の名称を答えよ。

以下の問いでは、 A が無限大の大きさを有する場合を考える。

(1-2) このとき、 $v_{m1}(t) = 0$ が成り立つ。この現象の名称を答えよ。

(1-3) 出力電圧のフェーザ \dot{V}_{out1} を、入力電圧のフェーザ \dot{V}_{in1} を用いて示せ。

次に、 $t < 0$ (t は時刻を表す)において定常状態^{*6}にある場合、図1の入力信号を $v_{in1}(t) = -u(t)$ [V]に変更した。ただし、関数 $u(t)$ は単位ステップ関数であり、以下のように定義する。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

(1-4) 時刻-1秒から3秒における出力電圧 $v_{out1}(t)$ を描け。また図には適切な縦軸、横軸、目盛、単位を明記し、各秒における電圧値も示しなさい。ただし、 $R = 1.0 \text{ k}\Omega$ 、 $C = 1.0 \text{ mF}$ とする。

図2の回路では、スイッチSW0~SW2の接続状況により、 $v_{out2}(t)$ の値を離散的^{*7}に切り替えられる。 $R_1 = 2.0 \text{ k}\Omega$ 、 $R_2 = 1.0 \text{ k}\Omega$ 、 $R_3 = 2.0 \text{ k}\Omega$ 、また $R_L = 1.0 \text{ k}\Omega$ として以下の問いに答えよ。

(2-1) 問い(1-2)を踏まえると、 R_1 、 R_2 および R_3 の各抵抗を流れる電流値はスイッチの接続状況に依存しない。これを考慮し、 R_3 を流れる電流 $i(t)$ の値を求めよ。

(2-2) $v_{out2}(t)$ の最大値と最小値を求めよ。またその際の各スイッチの接続状況(「左」もしくは「右」)を答えよ。

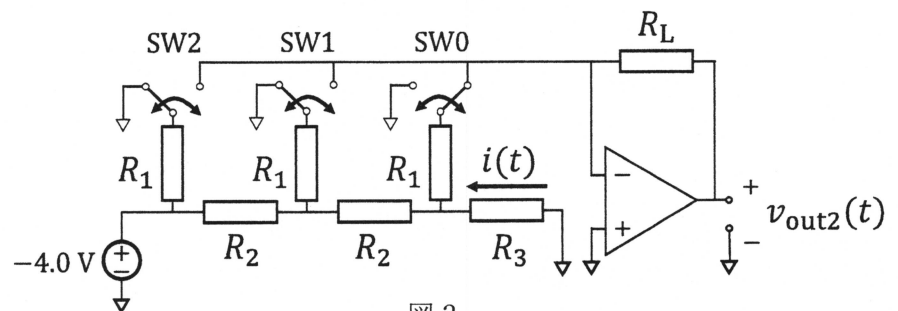


図2

注 図中、右の記号は基準電位^{*8}を示す。▽

*1 演算増幅器 : operational amplifier
 *2 電圧利得 : voltage gain
 *3 角周波数 : angular frequency
 *4 正弦波定常状態 : sinusoidal steady state

*5 フェーザ : phasor
 *6 定常状態 : steady state
 *7 離散的 : discrete
 *8 基準電位 : reference potential